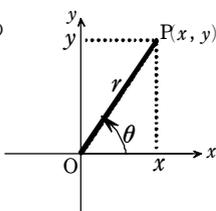




1 三角関数の定義と角度の基準

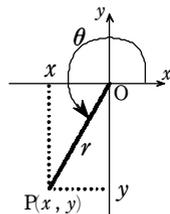
動径 OP が原点 O を中心に回転しているとき、動径の位置を x 軸の正の部分からの角度 θ で表すとします。



θ は、反時計回りのとき正、時計回りのとき負で表します。

動径が角度 θ の位置にあるとき

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \tan\theta = \frac{y}{x}$$



と定義します。

この三角関数の定義では、角度 θ の単位にはまったく触れていません。多くの皆さんの頭の中には、1 周を 360° とする角度が浮かんでいるのではないのでしょうか。

1° 未満の角度は、時間と同じ単位名で表します。

$$1^\circ = 60' \text{ [分]}, 1' = 60'' \text{ [秒]}, \text{秒以下は十進法の小数で表現}$$

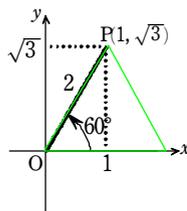
この角度の測り方を度数法とか 60 分法といいます。

通常の測量や地球上の位置を表わす経度、緯度にも使われています。

しかし、三角関数を定義するに当たっては、動径の図形的な位置が決まればよいわけで、その位置をどう表現するかは、三角関数の定義とはまた別の問題であるという点を強調しておきます。

たとえば、度数法で 60° の位置に動径 OP があるとき

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



ですが、これらの値の根拠は、 60 という数値ではなく、

60° が正三角形の内角の大きさであるところにあります。

そこで、正三角形のひとつの内角の大きさを 1^Δ と表すことにすれば

$$\sin 1^\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2^\Delta = -\frac{1}{2}, \tan \frac{1}{2}^\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ということが成り立つことになります。べつに問題はないですね。

あるいは、直角を基準にして 1 直角を 1^R とでも表すことにすれば

$\sin 1^R = 1, \cos \frac{1}{2}^R = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan(-\frac{3}{2})^R = 1$ など、何の問題もなく三角関数の値を考えることができます。

メートル法では直角を 100 と決めています。単位名は「グラード[GRAD]」といい、関数電卓では必ず設定できるようになっています。

いまここでは 1 グラードを 1^G と表すことにすると、 $\sin 50^G = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(-\frac{100}{3})^G = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^G = -1$ となります。



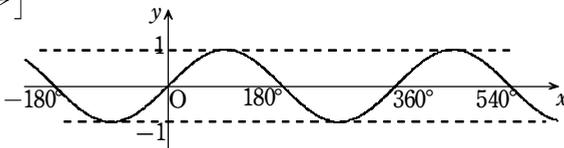
2 「標準的」なグラフ

$y = \sin x$ を例に考えてみます。

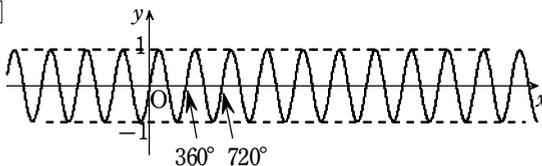
関数の変数として x を用いていますが、これはもはや、動径の図の中の x とは全く別物であることに注意してください。 y も同様です。

さて、 x を度数法としてグラフを3通り描いてみます。

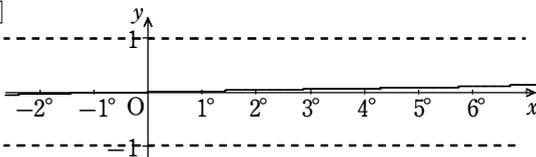
[ア]



[イ]



[ウ]



イは、動径1周分の 360° を y 軸の1と同じ長さにしてあります。

ウは、 x 軸の 1° と y 軸の1の長さを "揃えた" つもりのものです。

$y = \sin x$ のグラフとしてどれが一番「標準的」と言えるでしょうか？

(ウが階段状になっているのは、グラフを描くソフト (アプリ) の精度の限界のためで、実際は滑らかな曲線です。)



3 x軸とy軸の目盛り

ここで注目したいのは、x軸とy軸の目盛りの加減をどうすればよいかということです。

グラフのイにしてもウにしても、目盛りの幅をそのようにしたことには何か意味、そうすべき根拠はあるのでしょうか。

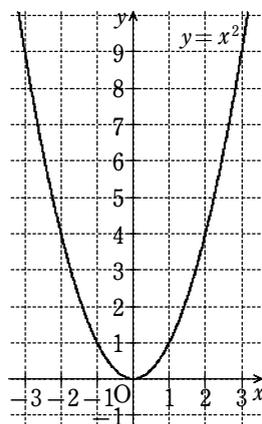
y軸の目盛りは正弦の値ですから、その定義（長さの比）により、無名数であることがわかります。

それと角度の360°や1°を同じ目盛り幅にすることに何の必然性もありません。

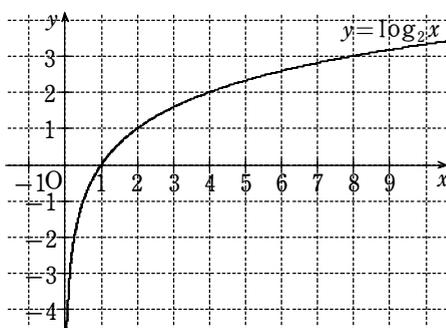
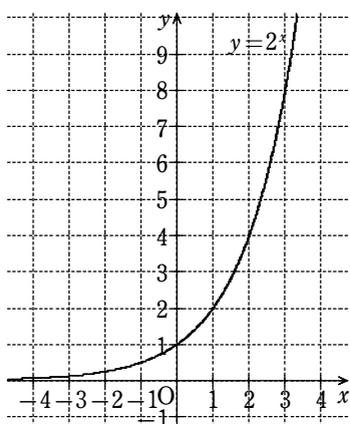
三角関数以外の関数、例えば2次関数 $y = x^2$ を考えてみます。

何も特別な状況設定がなければ、この場合のxとyに何の区別もなく、ともに単なる実数（無名数）です。したがって、普通はx軸とy軸は同じ目盛り幅にしてグラフを書きます。

そしてそのときのグラフの形が代表的な形として記憶にとどめられます。



指数関数 $y = a^x$ や対数関数 $y = \log_a x$ も同様です。

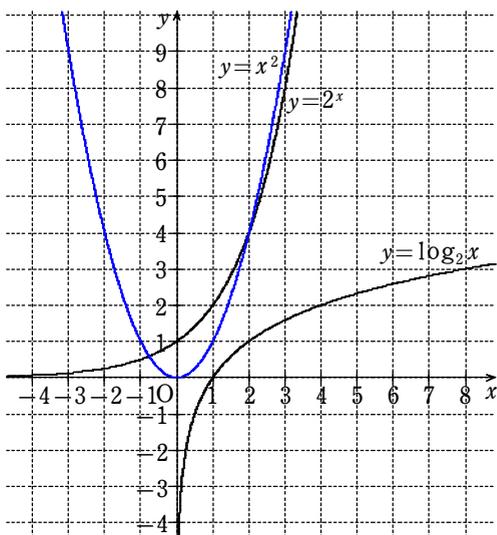


これらは、共通の座標平面上に重ねて書くことも可能で、お互いのy座標の大小関係や勾配の様子を比較することができます。

三角関数は、この仲間に入ることはできないのでしょうか。三角関数だけ別の座標平面でなければダメというのは、三角関数の本当の力は発揮できません。

この問題を解決するためには、角度xを長さなどとの関係

のない独特の基準で考えるのではなく、角度xも $y (= \sin x \text{ など})$ と同じ無名数（長さの比など）にする必要があります。





4 弧度法 (ラジアン)

角度を長さを使って表すために、角度を扇形の中心角と考えます。

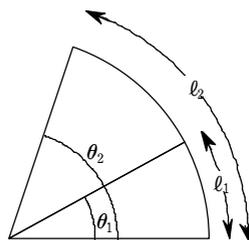
中心角の開き具合は、扇形の弧の長さに比例することから、弧の長さがどれくらいかということによって中心の開き具合が表わせるという仕組みです。

右図において、 l_1 , l_2 が扇形の弧の長さを表すとすると

$$\theta_1 : \theta_2 = l_1 : l_2$$

が成り立ちます。

したがって、中心角の開き具合を、対応する弧の長さで表すことができそうです。

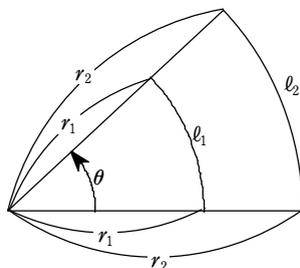


しかし、弧の長さそのものは、扇形の大きさ、つまり半径によって変わってしまいますから、長さそのもので角度を表すことはできません。

そこで、中心角が等しく、大きさの異なる2つの扇形を書いてみます。中心角が等しい扇形は互いに相似ですから、次の図において

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$$

が成り立ち、これは扇形の大きさに関係なく、中心角に比例して定まる値となります。



そこで

$$\frac{l}{r} = \frac{\text{弧の長さ}}{\text{半径}} = \text{中心角 } \theta$$

と考えることにしたのが弧度法という角度の計り方です。

これは、長さで長さの比ですから無名数ですが、角度を表すときには、単位名を「ラジアン」といいます。記号は「rad」とかきます。

最もわかりやすいのは、中心角 360° 、すなわち(扇形ではなく)円の場合、 $l = 2\pi r$ ですから

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

ということで

$$360^\circ = 2\pi [\text{rad}] = 6.28318\cdots [\text{rad}]$$

となります。

半円なら、

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

$$\therefore 180^\circ = \pi [\text{rad}] = 3.141592\cdots [\text{rad}]$$

となります。

このように比例関係にありますから、さらに半分の直角なら

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$$

です。ふつうは、 π はそのままにしておきます。

また、弧度法の場合は、今後は単位名は付けずに使います。ですから、他の単位の場合は、 $^\circ$ などの記号は省略してはいけません。



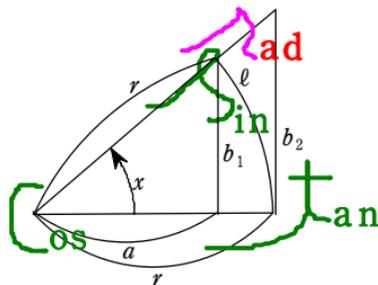
5 三角関数とラジアンの類似性

さて、このようにして決めたラジアンという角度は、実は三角関数とまったく同じ種類の量であることが次の図でもわかると思います。

ラジアンと三角関数は、すべて r を分母にして表わすことができます。

$$\cos x = \frac{a}{r}, \quad \sin x = \frac{b_1}{r}$$

$$x = \frac{\ell}{r} [\text{rad}], \quad \tan x = \frac{b_2}{r}$$



たまたま x にだけ「ラジアン」という

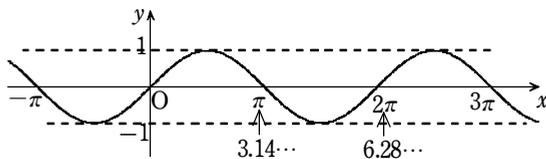
単位名が付いているだけです。すべて、長さの比で無名数ですから、本質的に、三角関数の値とラジアンはまったく同種の量なのです。

ですから、 $y = \sin x$ において、 x と y を同等に扱って目盛りの幅を揃えるということに意味があり、他の関数と重ねて比べることが可能になるのです。



6 三角関数も他の関数の仲間入り

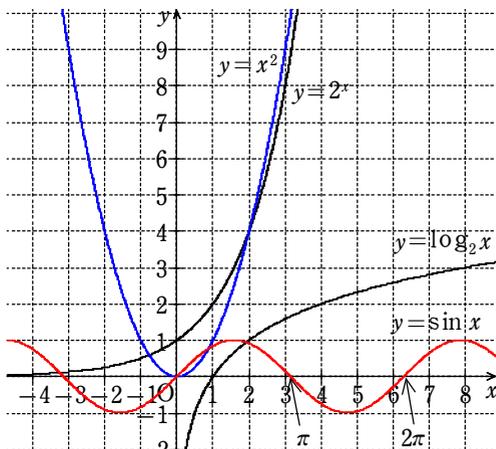
$y = \sin x$ のグラフを、 x を弧度法として書くと次のようになります。



これは実は、(2)のアのグラフの横軸を弧度法にしたものです。そして、 y 軸の目盛り幅と同じになっています。

x も y も無名数ですから、目盛りの幅を比較することが可能です。

それでは、2次関数や指数関数と一緒に書いておきます。



三角関数で弧度法を使うと、 $y = x + \sin x$ もグラフがかけます。

もし、 x が度数法や直角単位などの角度だったら、たとえば

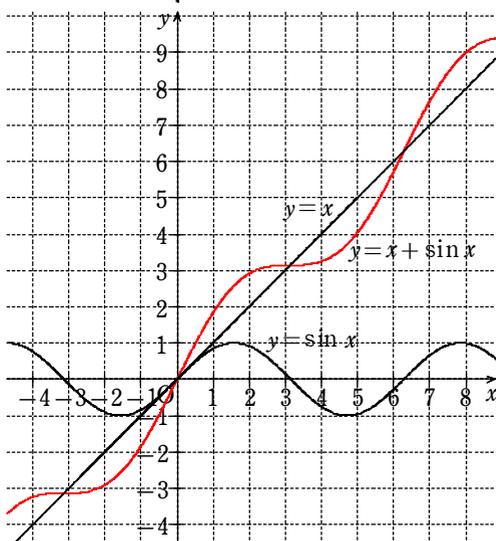
$$y = 60^\circ + \sin 60^\circ = 60^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

は、 y 座標が求められません。

しかし、弧度法ならば

$$y = \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.047197 \dots + 0.866025 \dots = 1.913222 \dots$$

という具合に計算ができます。





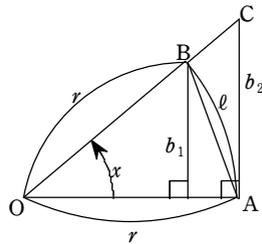
7 三角関数の重要な不等式

角度 x が鋭角のとき

$$b_1 < l < b_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

という大小関係になっています。

$b_1 < l$ は明らかですが、 $l < b_2$ は角度 x が小さいと必ずしも明らかではありません。



l と b_2 を比較するには、扇形の面積とその外側の直角三角形の面積を比較します。 b_1 も含めてきちんと証明しましょう。

$$\triangle OAB < \text{扇形 OAB} < \triangle OAC \quad \dots \textcircled{2}$$

は明らかです。

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} r b_1$$

$$\text{扇形 OAB} = \frac{\text{円の面積}}{\text{円周}} \cdot l = \pi r^2 \cdot \frac{l}{2\pi r} = \frac{1}{2} r l$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} r b_2$$

これらを②の不等式に代入すると

$$\frac{1}{2} r b_1 < \frac{1}{2} r l < \frac{1}{2} r b_2 \quad \therefore b_1 < l < b_2 \quad (\text{終})$$

次に、①の各辺を r (>0) で割れば

$$\begin{array}{ccc} \frac{b_1}{r} < \frac{l}{r} < \frac{b_2}{r} \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \sin x < x < \tan x & \left(\text{ただし } 0 < x < \frac{\pi}{2} \right) & \dots \textcircled{3} \end{array}$$

という大小関係であることがわかります。



8 角度が 0 に近いときの三角関数の値の近似

さらに、角度 x が 0 に非常に近いときには、

$b_1 \doteq \ell \doteq b_2$ となることが直感的に理解で

きるでしょう。ですから



$$x \text{ [rad]} \text{ が十分に } 0 \text{ に近いとき } \sin x \doteq x \doteq \tan x \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つということです。

つまり、0 に近い角度のときには、 $\sin x$ の代わりに角度 x そのもので近似できるということです。

実際

$$\sin 1^\circ = 0.01745 \ 24\dots, \quad \tan 1^\circ = 0.01745 \ 50\dots$$

ですが

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ [rad]} = 0.01745 \ 32\dots$$

で、3 つとも小数第 5 位まで一致します。

④は

$$\sin x \doteq x \text{ は } \frac{\sin x}{x} \doteq 1, \quad \tan x \doteq x \text{ は } \frac{\tan x}{x} \doteq 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

とも表現できます。

この関係式は、三角関数を微分するときに重要になってきます。そのときには、極限 (limit) という概念を用いて

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

という表現で扱われます。

このように、弧度法 (ラジアン) で測った角度 x と三角関数の値 y を同列に並べて比較できるというところが、三角関数を一人前の関数として扱うために非常に重要な役割になるのです。

逆の言い方をすると、三角関数を他の関数と一緒に扱うことがなく、微分積分も必要ない場合は、角度は度数法で十分です。

本講は、ここまでとします。